**Prova 1**

Probabilidade — Primeiro Semestre

Wyara Vanesa Moura e Silva — 2022

## Questão 1

Seja $\mathbf{X}$ uma variável aleatória com função de probabilidade de parâmetros $\theta > 0$ dada por

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{4k!}(1+\alpha k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Se $\alpha$ é constante positiva.

1. Calcular o valor de $\alpha$.

*Solução:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) &= 1\\
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\theta}\theta^k}{4k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha k\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{4k!} &= 1\\
\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} &= 1\\
\alpha\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{(k-1)!} &= 3\\
\alpha\cdot e^{-\theta}\cdot\theta\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} &= 3\\
\alpha\cdot e^{-\theta}\cdot\theta\cdot\left\{1+\frac{\theta}{1!}+\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^3}{2!}+\ldots\right\} &= 3\\
\alpha\cdot e^{-\theta}\cdot\theta\cdot e^{\theta} &= 3\\
\alpha &= \frac{3}{\theta}
\end{aligned}$$

2. Provar que podemos escrever

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(\mathbf{Y}=k)+\frac{3}{4}\mathbb{P}(\mathbf{T}=k).$$

onde $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$ tem distribuição de Poisson de parâmetros $\theta$ e ademais $\mathbf{T}=1+\mathbf{Z}$.

Pode usar que se $\mathbf{W}$ é Poisson de parâmetro $\theta$, então

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}=k) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

*Solução:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}+\frac{3}{4}\cdot\frac{k}{\theta}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

$\mathbf{Z} \sim$ Poisson $(\theta)$.

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}=k) \quad = \quad \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}=k) \quad = \quad \mathbb{P}(\mathbf{Z}+1=k) \; = \; \mathbb{P}(\mathbf{Z}=k-1) \; = \; \frac{e^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) \quad = \quad \frac{1}{4}\cdot\mathbb{P}(\mathbf{Y}=k) \; = \; \frac{3}{4}\cdot\mathbb{P}(\mathbf{T}=k)$$

mistura de poisson simples será uma poisson deslocada.

## Questão 2

Seja $\mathbf{X}$ uma variável aleatória geométrica com parâmetro $p$.

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) \quad = \quad p(1-p)^{k-1}, \quad 0<p<1, \quad k=1,2,\ldots$$

Encontrar

1. Uma fórmula para $\mathbb{P}(\mathbf{X}=k|\mathbf{X}>a)$, com $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$ e $a>0$.

*Solução:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathbf{X}=k) &= \sum_{k=0}^{\infty}p(1-p)^{k-1} \quad = \quad 1\\
\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k-1} &= \frac{1}{p}\\
1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots &= \frac{1}{p}\\
\frac{1}{1-(1-p)} &= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}=k|\mathbf{X}>a) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}=k;\mathbf{X}>a)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}>a)} \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k<a\\ \dfrac{\mathbb{P}(\mathbf{X}=k)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}>a)}, & \text{se} \quad k>a \end{cases}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{X}>a) &= \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}\mathbb{P}(\mathbf{X}=k)\\
&= \sum_{k=\lfloor a\rfloor+1}p(1-p)^{k-1}\\
&= p\left\{\left[(1-p)^{\lfloor a\rfloor}+(1-p)^{\lfloor a\rfloor+1}+(1-p)^{\lfloor a\rfloor+2}+\ldots\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p(1-p)^{\lfloor a \rfloor}\left[(1-p)^{\lfloor a \rfloor} + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots\right] \\
&= p(1-p)^{\lfloor a \rfloor} \cdot \frac{1}{p} \\
&= (1-p)^{\lfloor a \rfloor}
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
\mathbb{P}(\mathbf{X} = k|\mathbf{X} > a) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k < a \\ \dfrac{p(1-p)^{k-1}}{(1-p)^{\lfloor a \rfloor}}, & \text{se} \quad k > a \end{cases}
$$

2. O valor de $\mathbb{P}(\mathbf{X} = 10|\mathbf{X} > 2\pi)$, para $p = 1/2$.

*Solução:*

$p = 1$, $a = 2\pi$ e $k = 10$

$$
\mathbb{P}(\mathbf{X} = 10|\mathbf{X} > 2\pi) \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1-6} \quad = \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad = \quad \frac{1}{16}
$$

## Questão 3

Seja $\mathbf{X}$ variável aleatória exponencial de parâmetro $\theta > 0$ e $m$ uma constante positiva, então

$$
f_X(x) \quad = \quad \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0.
$$

Definimos

$$
\mathbf{Z} := \min\{\mathbf{X}, m\} \quad = \quad \mathbf{X}\mathbb{1}(\mathbf{X} \leq m) + m\mathbb{1}(\mathbf{X} > m), \quad m > 0
$$

Onde $\mathbb{1}(.)$ é a função indicadora.

1. Encontrar a função de distribuição de $\mathbf{Z}$, é uma mistura?

*Solução:*

$$
\mathbf{Z} \quad = \quad \begin{cases} \mathbf{X}, & \text{se} \quad \mathbf{X} \leq m \\ m, & \text{se} \quad \mathbf{X} > m \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{Z} = m) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} > m) &&= e^{-\theta m} \\
F_{\mathbf{Z}}(z) &= \mathbb{P}(\min\{\mathbf{X}; m\} \leq z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min\{\mathbf{X}; m\} > z) &&= 1 - [\mathbb{P}(\mathbf{X} > z, m > z)]
\end{aligned}
$$

$\mathbb{P}(\mathbf{Y}=m)=1$: variável degenerada (constante), $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são independentes.

$$= \quad 1-[\mathbb{P}(\mathbf{X}>z,\mathbf{Y}>z)] \qquad = \quad 1-[\mathbb{P}(\mathbf{X}>z)\cdot\mathbb{P}(\mathbf{Y}>z)]$$

$$F_{\mathbf{Z}}(z) \quad = \quad 1-[\mathbb{P}(\mathbf{X}>z)\cdot\mathbb{P}(\mathbf{Y}>z)]$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{Y}>z) \quad = \quad \mathbb{P}(m>z) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m>z \\ 0 & \text{se} \quad m\leq z \end{cases}$$

Assim,

$$F_{\mathbf{Z}}(z) \quad = \quad 1-e^{-\theta z}\cdot \mathbb{1}(z<m)$$

sim, é uma mistura.

2. Se for uma mistura, indicar as componentes da mistura. Fazer um desenho da função de distribuição de $\mathbf{Z}$.
*Solução:*

## Questão 4

Dada a variável aleatória $\mathbf{X}$ e a constante $a>0$, com densidade

$$f_{\mathbf{X}}(x) \quad = \quad \begin{cases} a/2, & \text{se} \quad -1<x\leq 0 \\ \frac{a}{2}e^{-x}, & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

1. Encontrar o valor da constante $a$.
*Solução:*

$$\frac{a}{2}+\int_0^\infty \frac{a}{2}e^{-x}dx=1$$

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

$$a=1$$

2. Encontrar a função de distribuição e função de densidade da variável aleatória $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^2$.
*Solução:*

$$F_{\mathbf{Y}}(y)=F_{\mathbf{X}}(\sqrt{y})-F_{\mathbf{X}}(-\sqrt{y}); \qquad y>0.$$

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[ f_{\mathbf{Y}}(\sqrt{y}) + f_{\mathbf{Y}}(-\sqrt{y}) \right]; \qquad y > 0.$$

$$\begin{aligned} 0 < y < 1; \qquad f_{\mathbf{Y}}(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} + \frac{1}{2} \right] \\ y \geq 1; \qquad f_{\mathbf{Y}}(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}} + 0 \end{aligned}$$